OPCIÓN A

1. (2'5 puntos) Halla los coeficientes a, b y c sabiendo que la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene en $x = 1$ un punto de derivada nula que no es un extremo relativo y que la gráfica de f pasa por el punto $(1,1)$.

Por un lado sabemos que la función tiene en $x = 1$ un punto de derivada nula por lo que $f'(1) = 0$ pero, además, no es un extremo relativo por lo que su segunda derivada no es positiva y tampoco negativa, así pues no queda otra que $f''(1) = 0$.

Por último sabemos que su gráfica para por el punto $(1,1)$ por lo que $f(1) = 1$.

Para poder aplicar todo esto calculamos en primer lugar $f'(x)$ y $f''(x)$.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

Luego:

$$f''(1) = 0 \;\; ; \;\; 6 + 2a = 0 \;\; ; \;\; 2a = -6 \;\; ; \;\; a = -3$$

$$f'(1) = 0 \;\; ; \;\; 3 + 2(-3) + b = 0 \;\; ; \;\; 3 - 6 + b = 0 \;\; ; \;\; b = 3$$

$$f(1) = 1 \;\; ; \;\; 1 - 3 + 3 + c = 1 \;\; ; \;\; c = 0$$

Solución: $a = -3$, $b = 3$ y $c = 0$.

2. Considera las funciones $f \ y \ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = |x^2 - 2x|$

a. (1'25 puntos) Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g y calcula los puntos de corte de dichas gráficas.

b. (1'25 puntos) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

a. Comenzaremos por analizar cada una de las funciones por separado, tras esto calcularemos los puntos de corte entre ambas gráficas y por último representaremos ambas sobre los mismos ejes utilizando la información obtenida:

$f(x) = 6x - x^2$ (Parábola)

Vértice

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{-6}{-2} = 3 \\ v_y &= f(3) = 18 - 9 = 9 \end{aligned}\right\} \quad V_1(3{,}9)$$

Puntos de corte con los ejes

$* \ Eje \ OX \ (y = 0)$

$$6x - x^2 = 0 \ ; \quad x(6 - x) = 0 \ ; \quad \begin{cases} x = 0 & (0{,}0) \\ 6 - x = 0 \ ; \quad x = 6 & (6{,}0) \end{cases}$$

$* \ Eje \ OY \ (x = 0)$

$$f(0) = 0 \quad (0{,}0)$$

$g(x) = |x^2 - 2z|$ (Parábola en valor absoluto)

En primer lugar expresamos la función como función a trozos, para ello calculamos los puntos que anulan la función que además coinciden con los puntos de corte con el eje OX:

$$x^2 - 2x \geq 0 \ ; \quad x^2 - 2x = 0 \ ; \quad x(x - 2) = 0 \ \begin{cases} x = 0 & (0{,}0) \\ x - 2 = 0 \ ; \quad x = 2 & (2{,}0) \end{cases}$$

+	-	+
	0	2

$$g(x)=\begin{cases} x^2-2x & x<0 \\ 2x-x^2 & 0\le x\le 2 \\ x^2-2x & x>2 \end{cases}$$

Vértice

$$\left.\begin{array}{l} v_x=\frac{2}{2}=\frac{-2}{-2}=1 \\ v_y=g(1)=2-1=1 \end{array}\right\} \quad V_2(1,1)$$

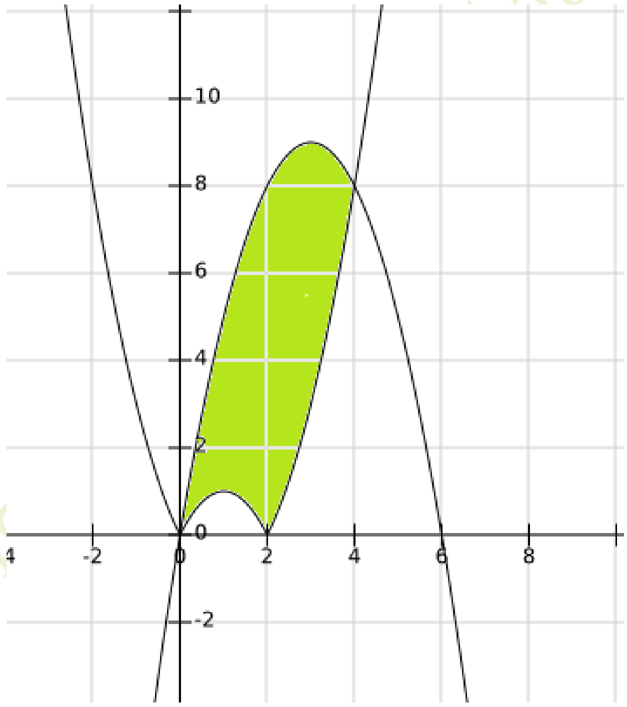
$f(x)=g(x)$ (Puntos de corte entre ambas funciones)

$$6x-x^2=x^2-2x \;\; ; \;\; -2x^2+8x=0 \;\; ; \;\; x(-2x+8)=0 \;\; \begin{cases} x\neq 0 \\ -2x+8=0 \;\; ; \;\; x=4 \end{cases}$$

$$f(4)=g(4)=24-16=8 \qquad (4,8)$$

$$6x-x^2=2x-x^2 \;\; ; \;\; 4x=0 \;\; ; \;\; x=0$$

$$f(0)=g(0)=0 \qquad (0,0)$$



b. $Área=\int_0^2\big((6x-x^2)-(2x-x^2)\big)\,dx+\int_2^4\big((6x-x^2)-(x^2-2x)\big)dx=$
$\int_0^2(6x-x^2-2x+x^2)\,dx+\int_2^4(6x-x^2-x^2+2x)dx=\int_0^2 4x\,dx+\int_2^4(-2x^2+8x)dx=$
$\left(\frac{4x^2}{2}\right)_0^2+\left(-\frac{2x^3}{3}+\frac{8x^2}{2}\right)_2^4=[Regla\ de\ Barrow]=2\cdot 4-0+\left(-\frac{2\cdot 4^3}{3}+4\cdot 4^2\right)-$
$\left(-\frac{2\cdot 2^3}{3}+4\cdot 2^2\right)=8-\frac{128}{3}+64+\frac{16}{3}-16=\frac{56}{3}u^2$

Solución: El área es de $\frac{56}{3}u^2$

3. Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+2y+(m+3)z=3 \\ x+y+z=3m \\ 2x+4y+3(m+1)z=8 \end{cases}$$

a. (1'75 puntos) Discútelo según los valores del parámetro m.

b. (0'75 puntos) Resuelve el sistema para $m=-2$.

a. Sean $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & m+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3m+3 \end{pmatrix}$ y $A'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3m \\ 2 & 4 & 3m+3 & 8 \end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & m+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3m+3 \end{vmatrix}=3m+3+4(m+3)+4-2(m+3)-2(3m+3)-4$$

$$=3m+3+4m+12+4-2m-6-6m-6-4=-m+3=0$$

$$m=3$$

* Si $m\neq 3$ entonces $Rg(A)=3=Rg(A')=n^{\underline{o}}incógnitas$ luego, por el Teorema de Rouché-Frobenius el sistema es Compatible Determinado.

* Si $m=3$

$$Rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-2F_1 \end{bmatrix}=Rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$Rg(A)=2\neq Rg(A')=3$ luego, por el Teorema de Rouché-Frobenius el sistema es Incompatible.

b. $m=-2$; $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ x+y+z=-6 \\ 2x+4y-3z=8 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -6 \\ 2 & 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}\sim\begin{bmatrix} F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-2F_1 \end{bmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{cases} x+2y+z=3 \\ -y=-9 \\ -5z=2 \end{cases}$$

$$-5z=2 \ ; \ z=-\frac{2}{5}$$

;

$$-y=-9 \ ; \ y=9$$

$$x+2y+z=3 \ ; \ x+2\cdot 9-\frac{2}{5}=3 \ ; \ x+18-\frac{2}{5}=3 \ ; \ x=3+\frac{2}{5}-18 \ ; \ x=-\frac{73}{5}$$

<u>Solución:</u> $x=-\frac{73}{5} \quad y=9 \quad z=-\frac{2}{5}$

4. Considera los puntos $P(1,0,-1)$, $Q(2,1,1)$ y la recta r dada por

$$x-5=y=\frac{z+2}{-2}$$

a. (1'25 puntos) Determina el punto simétrico de P respecto de r.

b. (1'25 puntos) Calcula el punto de r que equidista de P y Q

a. Hallamos en primer lugar el plano π que contiene a P y que es perpendicular a r, como π es perpendicular a r podemos usar $\overrightarrow{n_\pi}=\overrightarrow{d_r}=(1,1,-2)$:

$$\pi: Ax+By+Cz+D=0$$

$$\pi: x+y-2z+D=0$$

Como $P\in\pi$ sabemos que $1+0+2+D=0$ luego $D=-3$ y por tanto

$$\pi: x+y-2z-3=0$$

En segundo lugar calculamos el punto de corte entre la recta r y el plano π al que llamaremos M ya que será el punto medio entre P y su simétrico (P'). Para calcular M resolvemos el sistema formado pro las ecuaciones de la recta y el plano por lo que expresaremos r en forma general.

$$x-5=y \quad ; \quad x-y=5$$

$$y=\frac{z+2}{-2} \quad ; \quad -2y=z+2 \quad ; \quad 2y+z=-2$$

Luego $r: \begin{cases} x-y=5 \\ 2y+z=-2 \end{cases}$

Resolvemos el siguiente sistema para hallar el punto M

$$\begin{cases} x-y=5 \\ 2y+z=-2 \\ x+y-2z=3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim [F_3=F_3-F_1] \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim [F_3=F_3-F_2]$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x-y=5 \\ 2y+z=-2 \\ -3z=0 \end{cases} \; ; \quad \begin{array}{c} -3z=0 \;\; ; \;\; z=0 \\ 2y+z=-2 \;\; ; \;\; 2y=-2 \;\; ; \;\; y=-1 \\ x-y=5 \;\; ; \;\; x+1=5 \;\; ; \;\; x=4 \end{array}$$

Por lo que $M(4,-1,0)$.

Por último, sabemos que $M=\frac{P+P'}{2}$; $2M=P+P'$; $P'=2M-P$

$$2(4,-1,0)-(1,0,-1)=(8-1,-2-0,0+1)=(7,-2,1)$$

$$P'(7,-2,1)$$

<u>Solución</u>: $P(7,-2,1)$

b. En primer lugar expresamos r en forma paramétrica para ver qué forma tienen sus puntos:

$$r: \begin{cases} x=5+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-2-2\lambda \end{cases}$$

Sea A el punto de r que equidista de P y Q, entonces $A(5+\lambda,\lambda,-2-2\lambda)$ para algún valor de λ.

$$d(A,P)=d(A,Q)$$

$$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AQ}|$$

$$|(1,0,-1)-(5+\lambda,\lambda,-2-2\lambda)|=|(2,1,1)-(5+\lambda,\lambda,-2-2\lambda)|$$

$$|(-4-\lambda,-\lambda,1+2\lambda)|=|(-3-\lambda,1-\lambda,3+2\lambda)|$$

$$\sqrt{(-4-\lambda)^2+(-\lambda)^2+(1+2\lambda)^2}=\sqrt{(-3-\lambda)^2+(1-\lambda)^2+(3+2\lambda)^2}$$

$$16+8\lambda+\lambda^2+\lambda^2+1+4\lambda+4\lambda^2=9+6\lambda+\lambda^2+1-2\lambda+\lambda^2+9+12\lambda+4\lambda^2$$

$$6\lambda^2+12\lambda+17=6\lambda^2+16\lambda+19 \;\; ; \;\; -4\lambda=2 \;\; ; \;\; \lambda=-\frac{1}{2}$$

Luego $A\left(5-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-2-2\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=A\left(\frac{9}{2},-\frac{1}{2},-1\right)$

<u>Solución</u>: El punto es $A\left(\frac{9}{2},-\frac{1}{2},-1\right)$

OPCIÓN B

1. (2'5 puntos) Determina $k \neq 0$ sabiendo que la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 - kx^2 & si \quad x \leq 1 \\ \dfrac{2}{kx} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Es derivable.

Como sabemos que $f(x)$ es derivable sabemos que es también continua y, si lo es en $\mathbb{R}$ debe serlo también en $x = 1$ y esto es asumible tanto para la continuidad como para la derivabilidad.

<u>Continuidad en $x = 1$</u>

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$ debe cumplirse $f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$

$$f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3 - kx^2) = 3 - k$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{2}{kx} = \frac{2}{k}$$

Luego, como sabemos que es continua en $x = 1$ sabemos que $3 - k = \frac{2}{k}$; $\quad 3k - k^2 = 2$

$$k^2 - 3k + 2 = 0 \quad ; \quad k = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = 1 \end{cases}$$

Por lo que para que $f(x)$ sea continua puede ser $k_1 = 2$ o $k_2 = 1$.

Sabemos que la función es derivable por lo que podemos calcular su derivada en todo $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \begin{cases} -2kx & si \quad x \leq 1 \\ -\dfrac{2k}{k^2\, x^2} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2kx & si \quad x \leq 1 \\ -\dfrac{2}{k\, x^2} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

<u>Derivabilidad en $x = 1$</u>

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 1$ debe cumplirse $f'_-(1) = f'_+(1)$

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} (-2kx) = -2k$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} f'^{(x)} = \lim_{x \to 1^+} \left(-\frac{2}{kx^2}\right) = -\frac{2}{k}$$

Por lo que, como sabemos que la función es derivable podemos asumir que $-2k = -\frac{2}{k}$; $-2k^2 = -2$; $k^2 = 1$; $k = \pm 1$

Como necesitamos el valor de k para que la función sea derivable y para que lo sea ha de ser también continua podemos deducir que $k = 1$ ya que es el único para el que f cumple ambas propiedades.

Solución: $k = 1$

2. Considera las funciones f y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 3 - x^2$ y $g(x) = -\frac{x^2}{4}$

a. (1 punto) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$ y comprueba que también es tangente a la gráfica de g. Determina el punto de tangencia con la gráfica de g.

b. (0'75 puntos) Esboza el recinto limitado por la recta $y = 4 - 2x$ y las gráficas de f y g. Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (y la recta).

c. (0'75 puntos) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

a. Para hallar la ecuación de la recta tangente necesitamos la función derivada ya que la pendiente de la recta depende de ésta por lo que en primer lugar calculamos $f'(x)$

$$f'(x) = -2x$$

Recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$f(1) = 3 - 1 = 2 \quad , \quad f'(1) = -2$$

$$y - 2 = -2(x - 1)$$

$$y = -2x + 2 + 2$$

La ecuación de la recta tangente es $y = -2x + 4$.

Comprobemos que la recta es tangente también a $g(x)$ en algún punto $x = a$. Calculamos la derivada de g para poder calcular la recta tangente a esta función en el punto $x = a$.

$$g'(x) = -\frac{x}{2}$$

Recta tangente a $g(x)$ en $x = a$

$$y - g(a) = g'(a)(x - a)$$

$$g(a) = -\frac{a^2}{4} \quad , \quad f'(a) = -\frac{a}{2}$$

$$y - \left(-\frac{a^2}{4}\right) = -\frac{a}{2}(x - a)$$

$$y+\frac{a^2}{4}=-\frac{a}{2}x+\frac{a^2}{2}$$

$$y=-\frac{a}{2}x+\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{4}$$

$$y=-\frac{a}{2}x+\frac{a^2}{4}$$

Supuestamente la recta $y=-\frac{a}{2}x+\frac{a^2}{4}$ es la misma recta tangente que $y=-2x+4$ por lo que debe existir un valor de a tal que $\begin{cases}-\frac{a}{2}=-2\\ \frac{a^2}{4}=4\end{cases}$

$$-\frac{a}{2}=-2 \ ; \ -a=-4 \ ; \ a=4$$

$$\frac{a^2}{4}=4 \ ; \ a^2=16 \ ; \ a=\pm 4$$

Así pues, para $a=4$ las rectas coinciden y, para dar el punto calculamos $g(4)=-4$. El punto de tangencia es $(4,-4)$.

b. Comenzaremos por analizar cada una de las funciones por separado, tras esto calcularemos los puntos de corte entre las gráficas y por último representaremos las tres funciones sobre los mismos ejes utilizando la información obtenida:

$f(x)=3-x^2$ (Parábola)

Vértice

$$\left.\begin{array}{r} v_x=\frac{0}{-2}=0 \\ v_y=f(0)=3-0=3 \end{array}\right\} \quad V_1(0,3)$$

Puntos de corte con los ejes

$*\ Eje\ OX\ (y=0)$

$$3-x^2=0 \ ; \ x^2=3 \ ; \ x=\pm\sqrt{3} \quad \begin{cases}(-\sqrt{3},0)\\ (\sqrt{3},0)\end{cases}$$

$*\ Eje\ OY\ (x=0)$

$$f(0)=3-0=3 \quad (0,3)$$

$g(x) = -x^2/4$ (Parábola)

Vértice

$$\left.\begin{array}{r} v_x = \dfrac{0}{-2} = 0 \\ v_y = g(0) = 0 \end{array}\right\} \quad V_2(0{,}0)$$

Puntos de corte con los ejes

$* \; Eje \; OX \; (y = 0)$

$$-\frac{x^2}{4} = 0 \;\; ; \;\; x^2 = 0 \;\; ; \;\; x = 0 \qquad (0{,}0)$$

$* \; Eje \; OY \; (x = 0)$

$$g(0) = 0 \qquad (0{,}0)$$

Otros puntos

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
y	-4	-1	-1/4	0	-1/4	-1	-4

$h(x) = y = 4 - 2x$ (Recta)

Puntos de corte con los ejes

$* \; Eje \; OX \; (y = 0)$

$$4 - 2x = 0 \;\; ; \;\; 2x = 4 \;\; ; \;\; x = 2 \qquad (2{,}0)$$

$* \; Eje \; OY \; (x = 0)$

$$h(0) = 4 - 0 = 4 \qquad (0{,}4)$$

$f(x) = g(x)$ (Puntos de corte entre f y g)

$$3 - x^2 = -\frac{x^2}{4} \;\; ; \;\; 12 - 4x^2 = -x^2 \;\; ; \;\; 3x^2 = 12 \;\; ; \;\; x^2 = 4 \;\; ; \;\; x = \pm 2$$

$$f(-2) = g(-2) = 3 - 4 = -1 \;\; ; \;\; (-2, -1)$$

$$f(2) = g(2) = 3 - 4 = -1 \;\; ; \;\; (2, -1)$$

$f(x) = h(x)$ (Puntos de corte entre f y h)

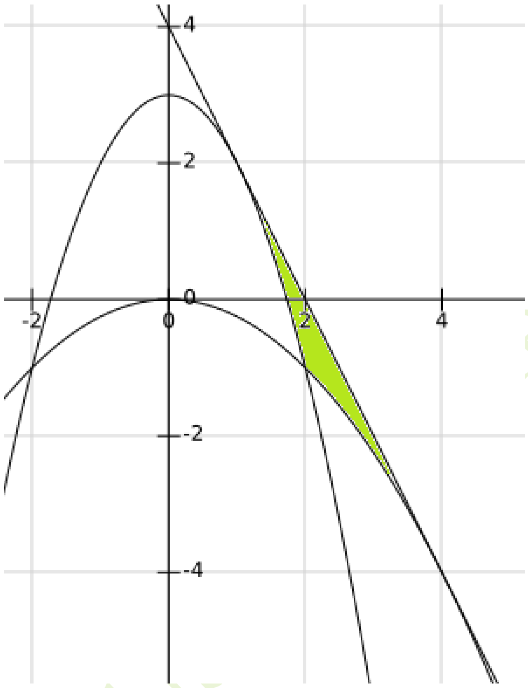
$$3 - x^2 = 4 - 2x \;\; ; \;\; x^2 - 2x + 1 = 0 \;\; ; \;\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1$$

$$f(1) = h(1) = 4 - 2 = 2 \;\; ; \;\; (1,2)$$

$g(x) = h(x)$ (Puntos de corte entre g y h)

$$-\frac{x^2}{4} = 4 - 2x \;\; ; \;\; -x^2 = 16 - 8x \;\; ; \;\; x^2 - 8x + 16 = 0 \;\; ; \;\; x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = 4$$

$$h(4) = g(4) = -4 \;\; ; \;\; (4, -4)$$



c. $Área = \int_1^2 (h(x) - f(x))dx + \int_2^4 (h(x) - g(x))dx = \int_1^2 (4 - 2x - 3 + x^2)dx + \int_2^4 \left(4 - 2x + \frac{x^2}{4}\right)dx = \int_1^2 (x^2 - 2x + 1)dx + \int_2^4 \left(\frac{x^2}{4} - 2x + 4\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + x\right)_1^2 + \left(\frac{1}{4}\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 4x\right)_2^4 = [Regla\ de\ Barrow] = \left(\frac{8}{3} - 4 + 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right) + \left(\frac{1}{4}\frac{64}{3} - 16 + 16\right) - \left(\frac{1}{4}\frac{8}{3} - 4 + 8\right) = 1\, u^2$

Solución: El área pedida es de $1\, u^2$

3. a. (1'5 puntos) Justifica que es posible hacer un pago de 34,50 euros cumpliendo las siguientes restricciones:

* utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros;

* se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas;

* tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas.

¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?

b. (1 punto) Si se redondea la cantidad a pagar a 35 euros, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.

a. $x \equiv \textit{número de monedas de } 50 \textit{ céntimos}$

$y \equiv \textit{número de monedas de } 1 \textit{ euro}$

$z \equiv \textit{número de monedas de } 2 \textit{ euros}$

Planteamos el sistema que resuelve el problema:

$$\begin{cases} x+y+z=30 \\ 0'5x+y+2z=34'5 \\ y=x+z \end{cases} ; \quad \begin{cases} x+y+z=30 \\ x+2y+4z=69 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

Sean $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 1 & 2 & 4 & 69 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 1 & 2 & 4 & 69 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 3 & 39 \\ 0 & -2 & 0 & -30 \end{pmatrix} \sim [F_3 = F_3 + 2F_2] \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 3 & 39 \\ 0 & 0 & 6 & 48 \end{pmatrix}$$

$Rg(A) = 3 = Rg(A') = n^{\underline{o}} \textit{incógnitas}$ luego, por el Teorema de Rouché-Frobenius el sistema es compatible determinado y por tanto tiene una única solución. Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=30 \\ y+3z=39 \\ 6z=48 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 6z=48 \; ; \; z=8 \\ y+3z=39 \; ; \; y+24=39 \; ; \; y=15 \\ x+y+z=30 \; ; \; x+15+8=30 \; ; \; x=7 \end{matrix}$$

Solución: La única forma en que se puede hacer es con 7 monedas de 0,5€, 15 monedas de 1 euro y 8 monedas de 2€.

b. Planteamos el nuevo sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=30 \\ 0'5x+y+2z=35 \\ y=x+z \end{cases} \; ; \; \begin{cases} x+y+z=30 \\ x+2y+4z=70 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

Sean $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 1 & 2 & 4 & 70 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 1 & 2 & 4 & 70 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 3 & 40 \\ 0 & -2 & 0 & -30 \end{pmatrix} \sim [F_3=F_3+2F_2] \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 3 & 40 \\ 0 & 0 & 6 & 50 \end{pmatrix}$$

$Rg(A)=Rg(A')=3=nº incógnicas$ luego por el Teorema de Rouché-Frobenius el sistema es compatible determinado y por tanto tiene una única solución. Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=30 \\ y+3z=40 \\ 6z=50 \end{cases} \quad 6z=50 \; ; \; z=\frac{25}{3}$$

Solución: En este caso el problema no tiene solución ya que no podemos utilizar $\frac{25}{3}$ monedas de 2€.

4. Considera el punto $P(2,-1,3)$ y el plano π de ecuación $3x+2y+z=5$.

a. (1'75 puntos) Calcula el punto simétrico de P respecto de π.

b. (0'75 puntos) Calcula la distancia de P a π

a. Hallamos en primer lugar la recta que pasa por P y es perpendicular a π, para ello, como es perpendicular a π utilizaremos $\overrightarrow{d_r}=\overrightarrow{n_\pi}=(3,2,1)$.

$$r: \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=z-3$$

Hallamos el punto de corte entre r y π al que llamaremos M ya que coincide con el punto medio entre P y su simétrico (P'), para ello primero expresamos r como intersección de dos planos y tras esto resolvemos el sistema compuesto por las ecuaciones de la recta y el plano.

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2} \quad ; \quad 2x-4=3y+3 \quad ; \quad 2x-3y=7$$

$$\frac{y+1}{2}=z-3 \quad ; \quad y+1=2z-6 \quad ; \quad y-2z=-7$$

$$r: \begin{cases} 2x-3y=7 \\ y-2z=-7 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x-3y=7 \\ y-2z=-7 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \end{pmatrix} \sim [F_2=3F_2-2F_1] \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -13 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \end{pmatrix} \sim [F_3=13F_3+F_2] \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -13 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -28 & -80 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ -13y-2z=11 \\ -28z=-80 \end{cases}$

$$-28z=-80 \quad ; \quad z=\frac{20}{7}$$

$$-13y-2z=11 \quad ; \quad -13y-\frac{40}{7}=11 \quad ; \quad -13y=\frac{117}{7} \quad ; \quad y=-\frac{9}{7}$$

$$3x+2y+z=5 \quad ; \quad 3x-\frac{18}{7}+\frac{20}{7}=5 \quad ; \quad 3x=5-\frac{2}{7}=\frac{33}{7} \quad ; \quad x=\frac{11}{7}$$

Luego $M\left(\frac{11}{7},-\frac{9}{7},\frac{20}{7}\right)$ y como $M=\frac{P+P'}{2}$; $2M=P+P'$; $P'=2M-P$

$$2M-P=2\left(\frac{11}{7},-\frac{9}{7},\frac{20}{7}\right)-(2,-1,3)=\left(\frac{8}{7},-\frac{11}{7},\frac{19}{7}\right)$$

Luego $P'\left(\frac{8}{7}, -\frac{11}{7}, \frac{19}{7}\right)$.

b. $d(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 - 5|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{14}}{7} u$

Solución: La distancia es de $\frac{\sqrt{14}}{7} u$