

## OPCIÓN A

**1. a. (1 punto)** Plantee, sin resolver, las restricciones de este problema e indique la función a optimizar. “Un ganadero alimenta a sus ovejas con maíz y pienso. Cada kilogramo de maíz aporta 600 g de hidratos de carbono y 200 g de proteínas, mientras que cada kilogramo de pienso aporta 300 g de hidratos de carbono y 600 g de proteínas. Cada oveja necesita diariamente como mínimo 1800 g de hidratos de carbono y 2400 g de proteínas. Si 1 kg de maíz cuesta 0’50 euros y 1 kg de pienso cuesta 0’25 euros, calcule cuántos kilogramos de cada producto tendría que comprar el ganadero para alimentar cada día a una oveja con un gasto mínimo”.

**b. (1’5 puntos)** Represente el recinto limitado por las siguientes restricciones, calculando sus vértices

$$x \geq 0 \quad x \leq 2y + 2 \quad x + y \leq 5$$

Calcule el máximo de  $F(x, y) = 4x + 3y$  en ese recinto, así como el punto donde se alcanza.

**a.**  $x \equiv$  kilogramos de maíz

$y \equiv$  kilogramos de pienso

$$F(x, y) = 0'5 \cdot x + 0,25 \cdot y$$

$$\begin{cases} 0'6 \cdot x + 0'3 \cdot y \geq 1'8 \\ 0'2 \cdot x + 0'6 \geq 2'4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b. La restricción  $x \geq 0$  nos indica que solo tendremos en cuenta la parte de los ejes en la que la variable  $x$  es positiva. Las otras dos inecuaciones representan rectas que representaremos a continuación:

$$x \leq 2y + 2$$

$$x - 2 \leq 2y \quad ; \quad y \leq \frac{x-2}{2}$$

$$y = \frac{x-2}{2}$$

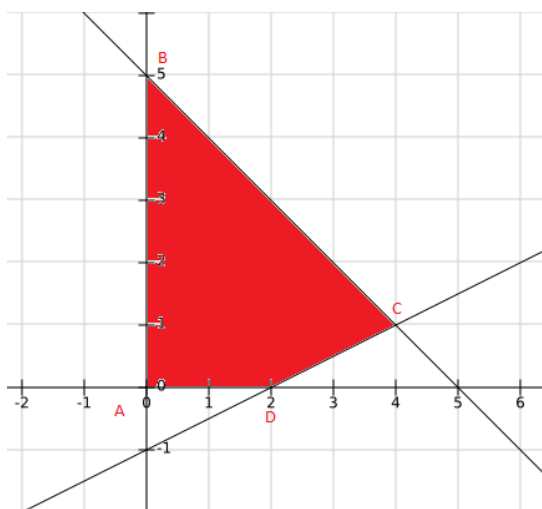
$$x + y \leq 5$$

$$y \leq 5 - x$$

$$y = 5 - x$$

X	Y
0	-1
2	0

X	Y
0	5
5	0



$$A(0,0) \quad B(0,5) \quad D(2,0)$$

Para calcular C calculamos el punto de corte entre ambas rectas:

$$\frac{x-2}{2} = 5-x \quad ; \quad x-2 = 10-2x \quad ; \quad 3x = 12$$

$$x = 4 \quad ; \quad y = 5 - 4 = 1 \quad ; \quad C(4,1)$$

Para hallar el máximo de la función en el recinto la evaluamos en cada uno de los vértices que lo forman:

$$F(A) = F(0,0) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$$

$$F(B) = F(0,5) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 15$$

$$F(C) = F(4,1) = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 19$$

$$F(D) = F(2,0) = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 8$$

Por tanto el máximo es 19 y se alcanza en el punto  $C(4,1)$ .

2. La función de costes de una empresa se puede determinar mediante la expresión

$$f(x) = 40 - 6x + x^2, \text{ para } x \geq 0$$

Donde x representa la cantidad producida de un determinado artículo.

a. (1 punto) ¿Disminuye el coste alguna vez? Determine la cantidad producida de dicho artículo cuando el coste es mínimo y cuál es dicho coste.

b. (0'8 puntos) ¿Cuál sería el coste si no se produjese nada de ese artículo? Si el coste fuese 80, ¿cuántas serían las unidades producidas?

c. (0'7 puntos) Represente gráficamente la función.

a. Para comprobar si disminuye alguna vez estudiaremos su monotonía y lo haremos mediante el signo de su derivada.

$$f'(x) = -6 + 2x = 0 ; 2x = 6 ; x = 3$$

	(0,3)	(3, +∞)
$f'(x)$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Monotonía	Decreciente	Creciente

Mínimo relativo

$$f(3) = 40 - 6 \cdot 3 + 9 = 40 - 9 = 31$$

El coste disminuye cuando se producen entre cero y tres artículos, con una producción de tres artículos el coste es mínimo y sería de 31.

b. Si no se produjese nada de este artículo entonces tendríamos  $x = 0$  luego para saber el coste calculamos  $f(0)$ .

$$f(0) = 40 - 0 + 0 = 40$$

Si no se produjese nada de este artículo el coste sería de 40.

Si el coste fuese de 80 tendríamos que para algún valor de x se cumple  $f(x) = 80$

$$40 - 6x + x^2 = 80 ; x^2 - 6x - 40 = 0 ; x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 160}}{2} = \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 10 \end{cases}$$

Como  $x$  debe ser mayor que cero podemos afirmar que si el coste fuese de 80 las unidades producidas serían 10.

c. La función es una función parabólica así que para representarla calcularemos su vértice y los puntos de corte con los ejes.

#### Vértice

Como antes estudiamos su monotonía calculamos su mínimo que coincide con su vértice, así pues  $V(3,31)$ .

#### Puntos de corte con los ejes

\* *Eje OX* ( $y = 0$ ) ;  $x^2 - 6x + 40 = 0$  ;  $x = \frac{6 \pm \sqrt{36-160}}{2}$  No tiene solución real por lo que no corta al eje OX.

\* *Eje OY* ( $x = 0$ ) ;  $f(0) = 40$  ; (0,40)

#### Tabla de valores

X	Y
2	32
4	32
5	35
6	40
7	47

#### Gráfica



3. En una determinada población residen 5000 personas en el centro y 10000 en la periferia. Se sabe que el 95 % de los residentes en el centro y que el 20% de los que viven en la periferia opina que el ayuntamiento debería restringir el acceso de vehículos privados al centro urbano. Se elige al azar un residente de la población.

a. (1'25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de restringir el acceso de vehículos privados al centro de la ciudad?

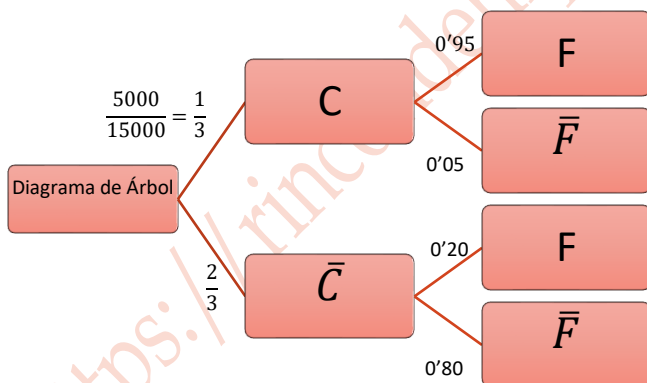
b. (0'5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que resida en el centro y esté a favor de la restricción de acceso?

c. (0'75 puntos) Si la persona elegida opina que se debería restringir el acceso, ¿cuál es la probabilidad de que resida en el centro de la ciudad?

Para resolver el problema en primer lugar vamos a construir un diagrama de árbol.

$C \equiv$  El residente vive en el centro

$F \equiv$  El residente está a favor de la restricción



a. Teorema de Probabilidad Total

$$P(F) = P(C) \cdot P(F / C) + P(\bar{C}) \cdot P(F / \bar{C}) = \frac{1}{3} \cdot 0.95 + \frac{2}{3} \cdot 0.2 = \frac{9}{20} = 0.45$$

La probabilidad de que esté a favor de restringir el acceso de vehículos privados al centro de la ciudad es de 0'45.

b.  $P(C \cap F) = P(C) \cdot P(F/C) = \frac{1}{3} \cdot 0.95 = \frac{19}{60} = 0.31\hat{6}$

La probabilidad de que resida en el centro y esté a favor de la restricción de acceso es de 0'316.

c. Teorema de Bayes

$$P(C/F) = \frac{P(C \cap F)}{P(F)} = \frac{0.31\hat{6}}{0.45} = \frac{19}{27} = 0.70\hat{3}$$

Sabiendo que está a favor de la restricción, la probabilidad de que resida en el centro de la ciudad es de 0'703.

4. Se dispone de cuatro tornillos de 1, 2, 3 y 4 gramos de peso respectivamente.

a. (1'25 puntos) Mediante muestreo aleatorio simple, exprese todas las muestras posibles de tamaño 2.

b. (1'25 puntos) Determine la media y la varianza de los pesos medios muestrales.

a. Suponemos que hay reemplazamiento, con lo cual las muestras posibles son:

(1,1) (1,2) (1,3) (1,4)  
 (2,1) (2,2) (2,3) (2,4)  
 (3,1) (3,2) (3,3) (3,4)  
 (4,1) (4,2) (4,3) (4,4)

b. Construimos la tabla para calcular tanto la media como la varianza de la muestra:

$x$	$f_i$	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
1	1	1	1
1'5	2	3	4'5
2	3	6	12
2'5	4	10	25
3	3	9	27
3'5	2	7	24'5
4	1	4	16
	$\sum f_i = 16$	$\sum x_i f_i = 40$	$\sum x_i^2 f_i = 110$

$$Media = \bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{40}{16} = 2'5$$

$$Varianza = \frac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i} - \bar{x}^2 = \frac{110}{16} - 2'5^2 = 0'625$$

La media es de 2'5 gramos y la varianza de 0'625 gramos.

## OPCIÓN B

1. Se consideran las matrices  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a. (1'2 puntos) ¿Se verifica la igualdad  $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$ ?

b. (1'3 puntos) Resuelva la ecuación matricial  $XA = 2B^t + I_2$

a. Para comprobar si se verifica la igualdad calculamos por separado cada uno de los miembros.

Por un lado:

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+1 \\ 1+1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Por otro lado:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ -1+2 & 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & 2-1 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 + 2AB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2+0 & -1+0 \\ 2+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

No se verifica ya que las matrices no son conmutativas.

b.  $XA = 2B^t + I_2$

$$XAA^{-1} = (2B^t + I_2)A^{-1}$$

$$X = (2B^t + I_2)A^{-1}$$

$$2B^t + I_2 = 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 0 = -2 \neq 0 \text{ luego } A \text{ tiene inversa}$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^t = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = (2B^t + I_2)A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+0 & 0+0 \\ -2-\frac{1}{2} & 0-\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Solución:  $X = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

<https://rincondehipatia.wordpress.com/>

2. Sea la función  $f = \begin{cases} x^3 + ax^2 & \text{si } x < 1 \\ bx + \frac{2}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a. (1'5 puntos) Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en  $x = 1$ .

b. (1 punto) Para  $b = 3$ , determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto de abscisa  $x = 2$ .

a. Continuidad en  $x = 1$

Para que  $f(x)$  sea continua en  $x = 1$  debe cumplirse  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 + ax^2) = 1 + a$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( bx + \frac{2}{x} \right) = b + 2$$

Luego  $1 + a = b + 2$  ;  $a - b = 1$ .

Sabemos que la función es derivable en  $\mathbb{R} - \{1\}$  y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2ax & \text{si } x < 1 \\ b - \frac{2}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Derivabilidad en  $x = 1$

Para que  $f(x)$  sea derivable en  $x = 1$  debe cumplirse  $f'_-(1) = f'_+(1)$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 + 2ax) = 3 + 2a$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( b - \frac{2}{x^2} \right) = b - 2$$

Por lo que  $3 + 2a = b - 2$  ;  $2a - b = -5$

Como la función debe ser derivable y continua ambas ecuaciones deben cumplirse por lo que la solución la obtendremos al resolver el siguiente sistema:  $\begin{cases} a - b = 1 \\ 2a - b = -5 \end{cases}$

$$a - b = 1 ; a = 1 + b$$

$$2a - b = -5 ; 2(1 + b) - b = -5 ; 2 + 2b - b = -5 ; b = -7$$

$$a = 1 + b = 1 - 7 = -6 ; a = -6$$

Solución: Para  $f(x)$  sea continua y derivable en  $x = 1$  debe ser  $a = -6$  y  $b = -7$ .

b. Recta tangente a  $f(x)$  en  $x = 2$

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$

$$f(2) = 2 \cdot 3 + \frac{2}{2} = 6 + 1 = 7, \quad f'(2) = 3 - \frac{2}{4} = \frac{5}{2}$$

$$y - 7 = \frac{5}{2}(x - 2)$$

$$y = \frac{5}{2}x - 5 + 7$$

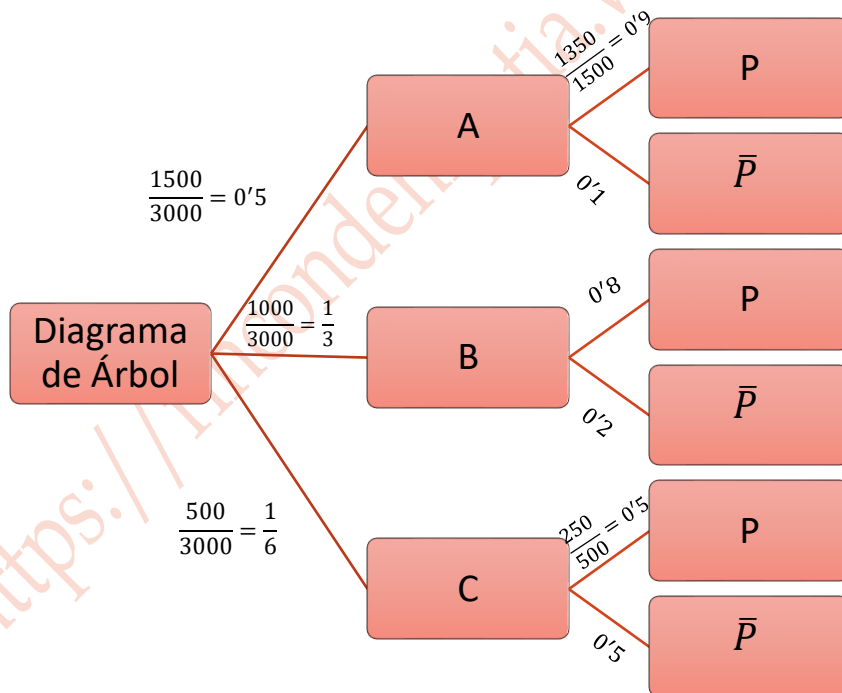
La ecuación de la recta tangente es  $y = \frac{5}{2}x + 2$ .

<https://rincondehipatia.wordpress.com/>

3. Un campus universitario dispone de 3000 plazas numeradas de aparcamiento para vehículos, distribuidas en tres zonas A, B y C. La zona A está constituida por las plazas del 1 al 1500, estando 1350 de ellas protegidas del sol. La zona B la conforman las plazas numeradas desde 1501 hasta 2500, estando el 80% protegidas del sol. La zona C contiene las plazas numeradas de 2501 hasta 3000, estando solamente 250 protegidas del sol. Aleatoriamente se elige una de las plazas de aparcamiento del campus.

- a. (0'75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en la zona A o en la B?
- b. (0'75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que no esté protegida del sol?
- c. (1 punto) Si se ha elegido una plaza protegida del sol, ¿Cuál es la probabilidad de que esté ubicada en la zona B?

En primer lugar representamos los datos en un diagrama de árbol que utilizaremos para calcular las distintas probabilidades.



$A \equiv$  El coche está aparcado en la zona A

$B \equiv$  El coche está aparcado en la zona B

$C \equiv$  El coche está aparcado en la zona C

$P \equiv$  El coche está aparcado en una plaza protegida del sol

$$a. P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0'5 + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

La probabilidad de que esté en la zona A o en la B es de  $\frac{5}{6}$ .

**b. Teorema de Probabilidad Total**

$$P(\bar{P}) = P(A) \cdot P(\bar{P}/A) + P(B) \cdot P(\bar{P}/B) + P(C) \cdot P(\bar{P}/C) = 0'5 \cdot 0'1 + \frac{1}{3} \cdot 0'2 + \frac{1}{6} \cdot 0'5 = \frac{1}{5} = 0'2$$

La probabilidad de que no esté protegida del sol es de 0'2.

**c. Teorema de Bayes**

$$P\left(\frac{B}{\bar{P}}\right) = \frac{P(B \cap \bar{P})}{P(\bar{P})} = \frac{P(B) \cdot P(\bar{P}/B)}{1 - P(P)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0'2}{1 - 0'2} = \frac{1}{3}$$

La probabilidad de que esté ubicada en la zona B es de  $\frac{1}{3}$ .

4. En un estudio sobre la utilización de nuevas tecnologías entre los estudiantes de Bachillerato, se ha realizado una encuesta a 500 estudiantes elegidos mediante muestreo aleatorio simple, resultando que 380 de ellos son usuarios de una determinada red social.

a. (1'5 puntos) Calcule un intervalo de confianza al 97% para la proporción de estudiantes que son usuarios de esa red social.

b. (1 punto) Suponiendo que se mantiene la proporción muestral, determine el número mínimo de estudiantes a los que sería preciso entrevistar para que, con un nivel de confianza del 96% el error cometido al estimar la proporción de usuarios de la citada red social no supere el 2%.

$$n = 500$$

$$\bar{p} = \frac{380}{500} = 0'76$$

$$a. IC_{0'97}(p) = \left( \bar{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}, \bar{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \right)$$

Calculamos el valor de z

$$\frac{z_{\alpha}}{2} = \frac{z_{0'03}}{2} = z_{0'015} = z_{0'985} = 2'17$$

Con los datos obtenidos calculamos el intervalo:

$$IC_{0'97}(p) = \left( 0'76 - 2'17 \sqrt{\frac{0'76(1-0'76)}{500}}, 0'76 + 2'17 \sqrt{\frac{0'76(1-0'76)}{500}} \right)$$

$$IC_{0'97}(p) = (0'7185, 0,8014)$$

b.  $Error < 0'02$

$$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} < 0'02$$

Calculamos el valor de z

$$\frac{z_{\alpha}}{2} = \frac{z_{0'04}}{2} = z_{0'02} = z_{0'98} = \frac{2'05 + 2'06}{2} = 2'055$$

Luego:

$$\frac{z_{\alpha}}{2} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} < 0'02$$

$$2'055 \sqrt{\frac{0'76(1-0'76)}{n}} < 0'02$$

$$\sqrt{\frac{0'76(1-0'76)}{n}} < \frac{0'02}{2'055}$$

$$\frac{0'76(1-0'76)}{n} < \left(\frac{4}{411}\right)^2$$

$$\frac{0'1824}{n} < \frac{16}{168921}$$

$$0'1824 \cdot 168921 < 16n$$

$$n > \frac{30811'1904}{16}$$

$$n > 1925'6994$$

Luego el número mínimo de estudiantes a los que sería preciso entrevistar es 1926.